DOI:10.16262/j.cnki.1000-8217.2000.05.017

·成果简介·

等时量子输运理论及其应用*

庄鹏飞

（清华大学物理系，北京 100084）

［关键词］ 输运理论，量子效应，QCD 相流

引 言

建立在 Wigner 算符基础上的输运理论[1]被广泛用于讨论超相对论重离子碰撞和夸克胶子等离子体。Wigner 算符可以在4维和3维动量空间表示，即 $\hat{W}(x,p)$ 和 $\hat{W}(x,\vec{p})$。相应地，输运理论有协变[2]和等时[3]两种形式。除了具有明显的 Lorentz 协变性外，协变理论的另一个优点是量子动力论方程可以分解为输运方程和反映离壳效应的约束方程。等时理论的最大优点是它能作为初始问题求解，因此，等时理论是联接相对论重离子碰撞实验和夸壳物质理论的桥梁。至今为止，一些真正的量子问题，例如在外场中的夸克对产生[4]，都是在等时理论的框架内进行讨论。

可以用平行于协变理论中的方法[2]，通过对等时密度算符 $\hat{\Phi}(x,\vec{y})$ 进行3维 Wigner 变换得到关于等时 Wigner 算符 $\hat{W}(x,\vec{p})$ 的动力论方程。但是，容易看出，4维和3维 Wigner 算符是不等价的。由它们的定义，

$$\begin{aligned}\hat{W}(x,p) &= \int d^4 y e^{ipy}\hat{\Phi}(x,y),\\ \hat{W}(x,\vec{p}) &= \int d^3\vec{y} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{y}}\hat{\Phi}(x,\vec{y})\end{aligned} \qquad (1)$$

得到两个 Wigner 算符之间的关系：

$$\hat{W}(x,\vec{p}) = \int \frac{dp_0}{2\pi}\hat{W}(x,p)。 \qquad (2)$$

由于在量子情形下，能量 p_0 是一个自由的变量，3维 Wigner 算符并不包含4维 Wigner 算符的所有信息。只有协变 Wigner 函数的所有能量矩的集合才完整地体现了系统的量子性质，即

$$\hat{W}(x,\vec{p}) = \{\hat{W}^n(x,\vec{p}) = \int \frac{dp_0}{2\pi}p_0^n\hat{W}(x,p), n = 1,2,\cdots\cdots\}, \qquad (3)$$

这里，我们已经定义 $\hat{W}(x,\vec{p}) \equiv \hat{W}^0(x,\vec{p})$ 所以，一个完备的等时理论不仅包含零阶能量矩，还应包含所有的高阶矩。每一个协变的动力论方程对应一个关于能量矩的无穷长的等时动力论链[4—7]。

1 等时动力链

为了简单起见，我们先不考虑动力论方程的碰撞项。在平均场近似下，协变的输运方程和约束方程可以一般地写成

$$\begin{aligned}\hat{G}(x,p)W(x,p) &= 0,\\ \hat{F}(x,p)W(x,p) &= 0,\end{aligned} \qquad (4)$$

输运算符 $\hat{G}$ 和约束算符 $\hat{F}$ 是4维时空 x_μ，4维动量 p_μ 以及它们的导数 $\partial_x^\mu,\partial_p^\mu$ 的函数。由于4维动量 p_μ 与场方程中的微分 ∂_μ 相对应，场方程最多包含二阶微分这一事实使得算符 $\hat{G}$ 和 $\hat{F}$ 最多含有动量的平方项。

我们将协变 Wigner 函数用一个正交的多项式 $h_j(p_0)$ 来展开，

$$W(x,p) = \sum_{j=0}^{\infty}\omega_j(x,\vec{p})h_j(p_0), \qquad (5)$$

h_j 满足

$$\int d\mu(p_0)h_j(p_0)h_j(p_0) = \delta_{ij}, \qquad (6)$$

$d\mu(p_0)$ 是多项式 h_j 的一个合适的度规，等时分量 $\omega_j(x,\vec{p})$ 是协变 Wigner 函数的能量积分，

$$\omega_j(x,\vec{p}) = \int d\mu(p_0)h_j(p_0)W(x,p)。 \qquad (7)$$

将展开式(5)和算符 $\hat{G},\hat{F}$ 的双重展开式

国家自然科学基金资助项目.
本文于2000年2月15日收到.

$$\hat{G}(x,p) = \sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{\infty}\hat{G}_{mn}(x,\vec{p})p_o^m(\frac{\partial}{\partial P_0})^n,$$
$$\hat{F}(x,p) = \sum_{m=0}^{M+1}\sum_{n=0}^{\infty}\hat{F}_{mn}(x,\vec{p})p_o^m(\frac{\partial}{\partial P_0})^n, \quad (8)$$

(如上所述,这里 $M\leqslant 1$)代入协变输运方程和约束方程(4),并且利用边界条件

$$\int d\mu(p_0)\frac{\partial}{\partial P_0}\left(\frac{\partial^n}{\partial p_0}(h_i(p_0)p_0^m)\frac{\partial^j}{\partial p_0^j}W(x,p)\right) = 0, \quad (9)$$

得到两个关于等时分量 $\omega_j(x,\vec{p})$ 的无穷动力链:

$$\sum_{j=0}^{i+M}\hat{g}_{ij}(x,\vec{p})\omega_j(x,\vec{p}) = 0,$$
$$\sum_{j=0}^{i+M+1}\hat{f}_{ij}(x,\vec{p})\omega_j(x,\vec{p}) = 0, \quad (10)$$

其中

$$\hat{g}_{ij}(x,\vec{p}) = \sum_{n=0}^{M}\sum_{m=0}^{i+M}C_{ij}^{mn}\hat{G}_{mn}(x,\vec{p}), i=0,1,2\cdots$$
$$\hat{f}_{ij}(x,\vec{p}) = \sum_{m=0}^{M+1}\sum_{n=0}^{i+M}C_{ij}^{mn}\hat{F}_{mn}(x,\vec{p}),$$
$$C_{ij}^{mn} = \frac{1}{2}\sqrt{(2i+1)(2j+1)}\int_{-1}^{1}dp_0h_j(p_0)$$
$$\left(-\frac{\partial}{\partial p_0}\right)^n(h_i(p_0)p_0^m)。 \quad (11)$$

为了给出系数 C_{ij}^{mn} 的具体形式,我们已经考虑了 Legendre 多项式。这时,等时分量 $\omega_i(x,\vec{p})$ 是由(3)式定义的能量矩 $W^k(x,\vec{p})$ 的线性组合,且有 $k\leq j$。例如零阶能量矩 $W(x,\vec{p}) = \sqrt{2}\omega_o(x,\vec{p})$。

等时输运链和约束链(10)完全等价于协变的输运方程和约束方程(4),所有量子效应都包含在这两个链中。

2 链的截断

(10)式是两个互相耦合的无穷长的动力论链,数学上不可能求解。用等时输运理论解决实际问题首先需要对链进行截断。假设用如下方法来截断两个动力论链:只考虑输运链中的前(I_t+1)个方程,约束链中的前(I_c+1)个方程,这些方程只包含前($j_{max}+1$)个能量矩。由式(10)中的求和限制,有

$$I_t + M = j_{max},$$
$$I_c + M + 1 = j_{max}。 \quad (12)$$

另外,从前(I_t+1)个输运方程和前(I_c+1)个约束方程唯一确定前($j_{max}+1$)个能量矩的充分必要条件是

$$I_t + 1 + I_c + 1 = j_{max} + 1。 \quad (13)$$

由方程(12)和(13),可以将截断参数 I_t, I_c 和 j_{max} 用 M 表示:

$$I_t = M,$$
$$I_c = M-1, \quad (14)$$
$$j_{max} = 2M。$$

这表明,输运链中的前($M+1$)个方程和约束链中的前 M 个方程构成一个有限的封闭子集合,唯一地确定了前($2M+1$)个等时能量矩 $W^i(x,\vec{p})$, $i\leq 2M+1$。

对于标量场,Klein-Gordon 方程包含二阶微分,动力论方程中的 $M=1$。因此前 2 个输运方程和第 1 个约束方程构成子集合,唯一给出前 3 个能量矩的解[4,7]。而这 3 个矩的物理意义分别是系统的标量密度,电荷密度和能量密度,即

$$电荷密度:\rho(x,\vec{p}) = 2eW^1(x,\vec{p}),$$
$$电流密度:\vec{j}(x,\vec{p}) = 2e\vec{p}W(x,\vec{p}), \quad (15)$$
$$能量密度:\varepsilon(x,\vec{p}) = 2W^2(x,\vec{p})。$$

因此,子集合完全确定了关于系统物理密度量的动力论方程。

对于自旋为 $\frac{1}{2}$ 的夸克场,Dirac 方程只含一阶微分,动力论方程中的 $M=0$。因此子集合只含第 1 个输运方程,它唯一地确定零阶能量矩,即等时 Wigner 函数 $W(x,\vec{p})$。在有自旋情形,任意阶的能量矩都是一个 4×4 的矩阵,通过自旋分解:

$$W(x,\vec{p}) = \frac{1}{4}[f_o(x,\vec{p}) + \gamma_5f_1(x,\vec{p}) - i\gamma_o\gamma_5f_2(x,\vec{p}) + \gamma_of_3(x,\vec{p}) + \gamma_5\gamma_o\vec{\gamma}\cdot\vec{g}_o(x,\vec{p}) + \gamma_o\vec{\gamma}\cdot\vec{g}_1(x,\vec{p}) - i\vec{\gamma}\cdot\vec{g}_2(x,\vec{p}) - \gamma_5\vec{\gamma}\cdot\vec{g}_3(x,\vec{p})], \quad (16)$$

可以得到 16 个输运方程[5,6],它们给出 16 个自旋分量的解[8]。所有自旋分量都有明确的物理意义。例如 f_o 表示电荷密度,$\vec{g}_o$ 表示自旋密度。

可以严格证明[7],子集合以外的所有输运方程都不是独立的,子集合以外的高阶能量矩由相应的约束方程决定。于是,以上构造的子集合不仅给出了关于物理密度量的演化方程,还可以用子集合的解来表示所有的高阶能量矩。至此,等时动力论链的建立和截断完成。

3 反常手征凝聚

除了从强子物质到夸克物质(QGP)的囚禁解除相变外,手征对称性恢复是高温 QCD 的另一个重要性质。破缺的对称性有可能在相对论重离子碰撞中得到恢复。因为 QGP 只是碰撞过程中的一个中间态,系统的冷却会使得夸克重新耦合成强子,恢复了

的手征对称性将重新破缺。手征对称性的这种演化在有限温度场论中已经被广泛地讨论。但是,高能重离子碰撞的时空区域非常小,高度激化的夸克胶子体系很可能在大部份时间处于非平衡状态。虽然碰撞前手征对称性的破缺在同位旋空间是指向标量场的方向,如果系统经历了一个非平衡手征相变,则有可能在碰撞后破缺方向发生旋转。所以,高能核碰撞有可能产生反常手征凝聚(DCC)。DCC 可以自然地解释 Centauro 事件中中性 π 介子的压低或升高。

夸克 Wigner 函数的多分量性质与手征凝聚的非平衡行为紧密相关。目前,关于 QGP 演化的许多工作都忽略了夸克、胶子的自旋自由度。但是,粒子的自旋 ~ ħ,是一级量子修正。在经典情形,粒子数密度与自旋之间没耦合。一个经典的夸克系统完全由粒子密度所满足的输运方程和反应手征性质的质量方程决定。赝标量凝聚在经典情形受质壳条件限制必须消失。

Nambu-Jona-Lasinio 模型(NJL)被广泛地用于讨论高温高密时的手征性质。虽然该模型不能重整,需要在动量空间引入截断,但是它能很好地描述手征相变的许多方面。在 ħ 展开的一级近似下,NJL 模型的等时量子输运方程和约束方程组[9]不仅给出粒子数密度和自旋密度的输运方程,还给出反常手征凝聚的时间演化,

$$\pi(t) = \frac{G}{m_0}\int\frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}\left(-\frac{m\partial_t m}{E^3}\vec{p}\cdot\vec{g}_0 + \frac{p_z}{tE}\vec{p}\cdot\partial_{p_z}\vec{g}_0 - \frac{E}{t}\partial_{p_z}g_{0z}\right), \tag{17}$$

式中 G 为 NJL 模型中的耦合常数,m_0 为流夸克质量,$E=\sqrt{\vec{p}^2+m^2(t)}$ 为夸克能量,$m(t)$ 是夸克动力学质量,由能隙方程决定。

在纵向标度不变近似下,联合求解方程(17)和 f_0 和 $\vec{g}_0$ 的输运方程组[9],发现尽管系统的膨胀和碰撞项使得 DCC 迅速衰减,但量子离壳效应产生幅度很大的 DCC 振荡。这是因为考虑量子离壳效应时,所有 16 个自旋分量都是独立的,互相之间的非线性耦合很强。所以如果相对论重离子碰撞系统经历了一个非平衡相变,则量子离壳效应有可能导致寿命较长的 DCC。

4 讨　论

我们提供了一种普遍的方法来从协变理论出发建立完备的等时量子输运理论。关键之处是对协变方程进行不同阶的能量平均,构造等时动力论链,然后截断链得到实用的关于物理密度量的演化方程。值得注意的是,我们提供的截断方案是找出一个有限的封闭的子集合,因此截断之后没有丢掉任何信息。

尽管本文的讨论局限于平均场近似,但在标量场时考虑碰撞项以后,上述方法仍然适用,但由于多体关联按单体函数展开,使得输运方程和约束方程链中方程的项数增加[10]。

截断之后得到的子集合在完全量子情形下求解仍然是非常困难的,可以用半经典展开系统地考虑量子修正,用阿贝尔优势展开逐级考虑非阿贝尔效应,用 Bjorken 近似考察相对论重离子碰撞中心区的演化。将以上等时输运理论用于有效的 QCD 模型,可以数值讨论有限温度有限密度时的夸克囚禁解除相变和手征相变。

参　考　文　献

[1] Elze H -Th, Heinz U. Phys. Rep., 1989, **183**:81.
[2] Elze H -Th, Gyulassy M, Vasak D. Nucl. Phys., 1986, B**276**:706.
[3] Bialynicki-Birula I, Gornicki P, Rafelski J. Phys, Rev., 1991, D**41**: 1 825.
[4] Zhuang P, Heinz U. Ann. phys.(N.Y.), 1996, **245**:311.
[5] Zhuang P, Heinz U. Phys. Rev., 1996, D**53**:2 096.
[6] Abada A, Birse M C, Zhuang P et al. Phys. Rev., 1996, D**54**:4 175.
[7] Zhuang P, Heinz U. Phys. Rev., 1998, D**57**:6 525.
[8] Zhuang P, Physik Z. 1997, A**359**:291.
[9] Zhuang P. Science in China, 1998, **41**:1 315.
[10] Zhuang P, Fauser R. Chin. Phys. Lett., 1998, **15**:708.

EQUAL-TIME QUANTUM TRANSPORT THEORY AND ITS APPLICATION

Zhuang Pengfei
(*Physics Department, Tsinghua University, Beijing* 100084)

Key words　transport theory, quantum effect, QCD phase transitions